Mechanik ausgedehnter Körper I

• 3 Ortskoordinaten u. 3 Raumwinkel

Aggregatzustände
- Festkörper
  - kristallin
  - amorph (z.B. Glas)
- Flüssigkeit
- Gas

Starrer Körper: undeformierbarer Festkörper

Bew.en
- → Translation des Schwerpunkts: 3 Lagekoordinaten
- → Rotation um den Schwerpunkt: 3 Winkel

} 6 Freiheitsgrade

Schwerpunkt $\boxed{\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i}$

Schwerpunkt: bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle externen Kräfte an ihm angreifen

Rotation um feste Achse

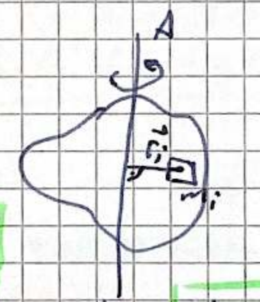
$\vec{r}_i$: zum SP

$r_{i\perp}$: zur Achse

$$E_{rot} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_{i\perp}^2 \omega^2\right)$$

$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J_A \omega^2}$ mit $\boxed{J_A = \sum_i m_i r_{i\perp}^2}$

Trägheitsmoment um A → $\boxed{J_A = \int r_\perp^2 \rho \, dV}$



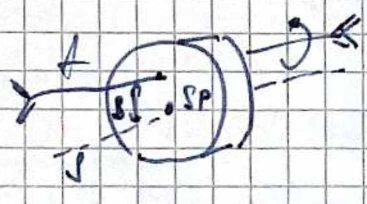
Drehung um freie Symmetrieachse

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i r_{i\perp} (m_i v_i) = \sum_i r_{i\perp}^2 m_i \omega}$$

→ $\boxed{\vec{L} = J_A \cdot \vec{\omega}}$ → $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$

Feste Drehachse

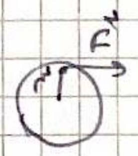
$\boxed{\vec{L} = J_A \cdot \vec{\omega}}$



Steinerscher Satz

$\boxed{J_A = J_S + m \cdot S^2}$

Mechanik ausgedehnter Körper II



$$\boxed{\vec M = \vec r \times \vec F}$$

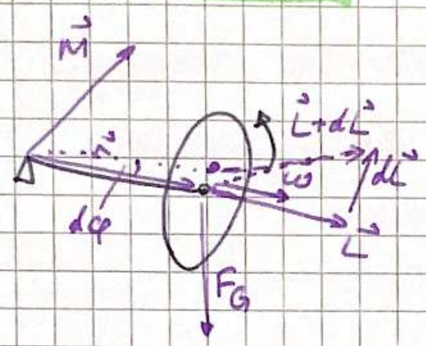
$$\boxed{\vec M = J \cdot \frac{d\vec\omega}{dt}}$$ (Herleitung)

$$\boxed{\vec M = \frac{d\vec L}{dt}}$$

$$\boxed{\vec M = \vec r \times \vec F} \qquad \boxed{\vec L = J_A \cdot \vec\omega}$$

→ Drehung um feste oder Symmetrieachse

Rad-Experiment:



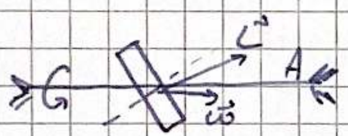
$dL = d\varphi L$

$$\boxed{M = \frac{dL}{dt} = L\,\frac{d\varphi}{dt} = L\,\omega_p}$$

ω_p: Winkelgesw. der Präzessionsbew.

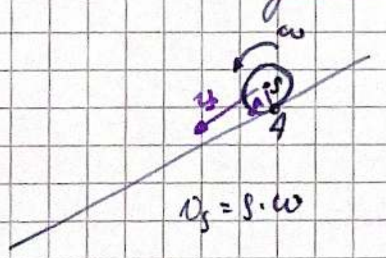
$$\boxed{\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega}}$$

Drehung um Nicht-Symmetrieachse



Rotation u. Translation

Ebene Bew.: alle Massenelemente bewegen sich parallel zu einer Ebene



Zu jedem Zeitpunkt: reine Drehung

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} J_A \omega^2} \rightarrow \text{Steinerscher Satz} \quad \boxed{J_A = J_S + m s^2}$$

$$\rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2}(ms^2 + J_S)\cdot\omega^2 = \frac{1}{2} m (s\omega)^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2}$$

→ gilt allgemein für Achse um SP

$$= \boxed{\frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \frac{v_S^2}{R^2}}$$

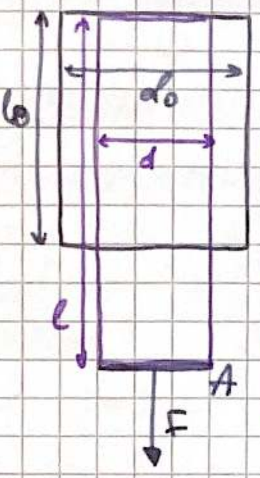
[SP = Schwerpunkt]

Bew. des SP: $\boxed{m \frac{d\vec v_S}{dt} = \sum_i \vec F_i}$

Drehung um SP: $\boxed{\vec M_S = J_S \frac{d\omega}{dt}}$

Deformierbare feste Körper I

Elastische Dehnung



Dehnung $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}}$

Querdehnung $\boxed{\varepsilon_Q = -\frac{\Delta d}{d_0} = -\frac{d - d_0}{d_0}}$

Spannung $\boxed{\sigma = \frac{F}{A}}$ $\quad F \perp A$

$\boxed{[\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa}$
(Pascal)

Poissonsche Querkontraktionszahl

$\boxed{\upsilon = \frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon} = -\frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0}}$

$\upsilon_{Stahl} = 0{,}28$

$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E \cdot \frac{l - l_0}{l_0}$

Elastizitätsmodul $\quad E_{Cu} = 100\,GPa$

Hooke'sches Gesetz ⌈vgl. $F = k \cdot x$ bei Feder⌋

→ Näherung gilt nur wenn man nicht „zu dolle" zieht

Volumenänderung bei einachsigem Spannungszustand
(in eine Richtung ziehen)

Δ^2 ist vernachlässigbar

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(d_0 + \Delta d)^2 (l_0 + \Delta l) - d_0^2 l_0}{d_0^2 l_0} \approx \frac{d_0^2 \Delta l + 2 d_0 \Delta d \, l_0}{d_0^2 l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + 2\frac{\Delta d}{d_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l}{l_0}\left(1 + 2\frac{\Delta d / d_0}{\Delta l / l_0}\right) - \varepsilon(1 - 2\upsilon) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1 - 2\upsilon}{E}\sigma}$$

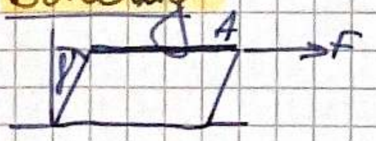
Bei allseitiger Spannung: $\boxed{\Delta p = -\sigma}$ hydrostatischer Druck

$$\frac{\Delta V}{V_0} = +3\frac{1 - 2\upsilon}{E}\sigma = \underbrace{-3\frac{1 - 2\upsilon}{E}}_{}\Delta p = \boxed{-\kappa \, \Delta p}$$

$\boxed{\kappa = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} = 3\frac{1 - 2\upsilon}{E}}$ Kompressibilität

⌈Kompressionsmodul $K = \frac{1}{\kappa}$⌋

Scherung



Schubspannung $\boxed{\tau = \frac{F}{A}}$ $\quad [\tau] = Pa$

$\boxed{\tau = G \cdot \gamma}$ Hooke'sches Gesetz für die Scherung

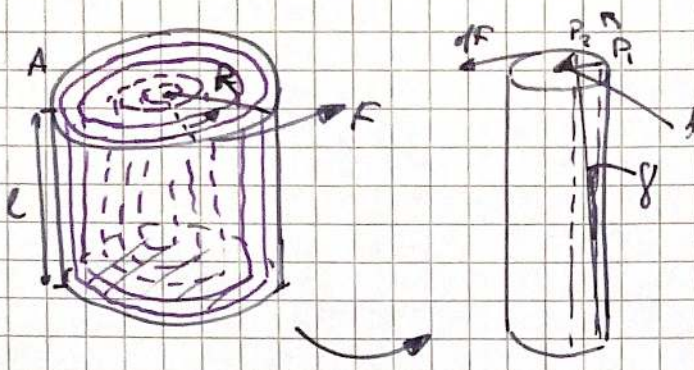
Schubmodul / Schermodul / Torsionsmodul

Isotroper Festkörper: $\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \upsilon)}}$

(kein Kristall)
(keine Vorzugsrichtung)

Deformierbare feste Körper II

Torsion: Verdrehung entlang der Längsachse



$\overline{P_1 P_2} = r\varphi = l\gamma$

$dA = 2\pi r\, dr$ → Kraft dF

→ Scherung

$\tau = \frac{dF}{dA} = G \cdot \gamma = G\frac{\varphi}{l} r$

Drehmoment

$dM = r\, dF = G\frac{\varphi}{l} r^2 dA$

$dM = 2\pi G \frac{\varphi}{l} r^3 dr$

$$M = \int_0^R 2\pi G \frac{\varphi}{l} r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2l} \varphi$$

Winkelrichtgröße

$$\boxed{D = \frac{\pi G R^4}{2l}}$$

Torsion eines Zylinders

$\boxed{M = -D\varphi}$ (vgl. $F = -kx$)

Plastische Verformung